ULB **Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique**

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 8 - La transformation de Fourier

Exercice 1 (Équation d'onde amortie)**.** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha y = 0,$$

où $c, \alpha > 0$, dont on cherche la solution $y(x,t)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, telle que y est de Schwartz par rapport à x, dérivable par rapport à t et telle que les intégrales sur $\mathbb{R}$ par rapport à x de $|y(x,t)|$ et $\left|\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|$ convergent uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$ par rapport à t. En outre, $y(x,t)$ obéit à la condition initiale

$$y(x,0) = f(x),$$

où $f \in \mathcal{S}$ est une fonction donnée.

1. Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}(y)(\xi,t)$ par rapport à la variable x de la solution $y(x,t)$ cherchée.
2. En déduire l'expression de la solution $y(x,t)$ en termes de la fonction $f(x)$.
3. Pour quelle classe de fonctions est-ce que la solution est valide pour tout f dans cette classe ?

Remarque. Les étudiant.e.s qui ne suivent pas le cours Topologie peuvent assumer les 5 premières questions du prochain exercice. Ils peuvent également utiliser que dans un espace métrique M, $f : M \to M$ est continu si et seulement si pour chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans M

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x).$$

Exercice 2 (*)**.** Considérons l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{S}$ et $k, l \in \mathbb{N}$ on définit

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{k,l}$ est un norme sur $\mathcal{S}$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.

Pour $f \in \mathcal{S}, R > 0$ et $k, l \in \mathbb{N}$,

$$B_{k,l}(f,R) := \{g \in \mathcal{S} \mid \|f - g\|_{k,l} < R\}.$$

Soit τ la topologie sur $\mathcal{S}$ engendrée par les sous-ensembles $B_{k,l}(f,R)$ (c'est-à-dire, $A \subseteq \mathcal{S}$ est ouvert si et seulement si pour chaque $f \in A$ il existe $k_i, l_i \in \mathbb{N}$ et $R_i > 0$ tel que $\bigcap_{i=1}^n B_{k_i,l_i}(f,R_i) \subseteq A$).

2. Soit β une bijection $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Montrer que

$$d(f,g) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{\beta(k,l)}} \frac{\|f-g\|_{k,l}}{1+\|f-g\|_{k,l}}$$

   est une métrique sur $\mathcal{S}$. (Aide : montrer que $h : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est une fonction croissante et que $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$ pour $x, y \geq 0$.)
3. Montrer que d induce la topologie τ sur $\mathcal{S}$.
4. Montrer que $\|f\| := d(f,0)$ ne définit pas un norme sur $\mathcal{S}$.
5. Montrer que $f_n \to f$ dans $(\mathcal{S}, \tau)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0;\ \forall k, l \in \mathbb{N};\ \exists N \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{k,l} < \varepsilon.$$

Maintenant on sait que $(\mathcal{S}, \tau)$ est un espace métrique et on a une définition de convergence dans $\mathcal{S}$.

6. Montrer que

$$f_n \to f \text{ dans } (\mathcal{S}, \tau) \implies \mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f) \text{ dans } (\mathcal{S}, \tau).$$

7. Conclure que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continu.
8. Montrer que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un homéomorphisme.